ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Trần Thị Nhung

PHÂN THỨC CHÍNH QUY NHIỀU BIẾN VÀ CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Trần Thị Nhung

PHÂN THỨC CHÍNH QUY NHIỀU BIẾN VÀ CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

MỞ ĐẦU

Phân thức hữu tỷ, đặc biệt là phân thức chính quy là một trong những khái niệm cơ bản của chương trình Toán ở bậc phổ thông. Đặc biệt, ở các trường THPT chuyên và các lớp chuyên toán có rất nhiều dạng toán liên quan đến hàm phân thức chính quy. Trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán trong nước và các kỳ thi Olympic Toán của các nước trên thế giới, có nhiều bài toán về dãy số, bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình,... sinh bởi các hàm số dạng phân thức và vì thế cần biết cách vận dụng tính đặc thù của biểu thức phân thức đã cho. Hiện nay các tài liệu có tính hệ thống về vấn đề này còn chưa được đề cập nhiều.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn Toán ở bậc phổ thông, luận văn Phân thức chính quy nhiều biến và các dạng toán liên quan nhằm hệ thống và giải quyết các bài toán liên quan đến phân thức chính quy. Luận văn này được chia làm ba chương:

Chương 1. Một số dạng đại lượng trung bình cơ bản

Chương 2. Phân thức chính quy và chính quy suy rộng.

Chương 3. Các dạng toán liên quan.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành sâu sắc tới GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu đã dành thời gian hướng dẫn, chỉ bảo tận tình và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình xây dựng đề tài cũng như hoàn thành luận văn.

Tiếp theo, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô đã đọc, kiểm tra, đánh giá và cho tôi nững ý kiến quý báu để luận văn được hoàn thiện hơn. Qua đây, tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Chương 1. Một số dạng đại lượng trung bình cơ bản

1.1 Khai triển Newton

Ta nhắc lại khai triển Newton (xem [1], [3]) cho cặp số và bộ số.

Định lý 1.1 (Khai triển nhị thức Newton)**.** Với a, b là các số thực và n là số tự nhiên lớn hơn bằng 2, ta luôn có

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \tag{1.1}$$

trong đó

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Công thức (1.1) gọi là công thức nhị thức Newton.

Định lý 1.2 (Khai triển Newton)**.** Cho n và m là các số nguyên dương. Với bất kỳ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ trong $\mathbb{R}^n$, ta có

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \tag{1.2}$$

trong đó $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$ với $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ trong $\mathbb{N}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ và tổng chạy qua tất cả α có thể có trong $\mathbb{N}^n$ thỏa mãn $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$.

Định lý 1.3 (Khai triển Taylor)**.** Cho một đa thức

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

Khi đó, hệ số thứ j của $f(x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0),$$

trong đó $f^{(j)}(0)$ ứng với đạo hàm cấp j tại 0.

Chứng minh. Lấy đạo hàm lần thứ j của x^k, ta được

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j x^k = \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j}, \quad \text{nếu } j \le k$$

và

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j x^k = 0, \quad \text{nếu } j > k,.$$

Ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{d}{dx}\right)^j x^k = \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} a_k x^{k-j}, \quad \text{với bất kì } j \text{ nằm giữa 0 và } n..$$

Khi đó

$$f^j(0) = j! a_j.$$

Suy ra

$$a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0).$$

Định lý 1.4. Cho n là một số nguyên dương. Ta đặt

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n\right)^n.$$

Khi đó $g^{(n)}(0) = n!$.

Chứng minh. Ta có

$$g(x) = x^n \left(1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{n}x^{n-1}\right)^n = x^n h(x),$$

trong đó

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{n}x^{n-1}\right)^n.$$

Áp dụng công thức Leibniz

$$g^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} x^n . \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} h(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!n!}{(n-j)!j!j!} x^j . \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} h(x).$$

Vậy nên

$$g^{(n)}(0) = n!h(0) = n!.$$

1.2 Định lý về các giá trị trung bình cộng và nhân

Tiếp theo, ta sẽ đề cập đến định lý về bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân (còn gọi là bất đẳng thức AM-GM[1]) và dạng bất đẳng AM-GM suy rộng. Đặc biệt, trong chương này trình bày một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức AM-GM của các nhà toán học nổi tiếng.

Định lý 1.5 (xem [1]-[2])**.** Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM là bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình điều hòa (gọi và viết tắt là bất đẳng thức GM-HM.[2])

Hệ quả 1.1 (Bất đẳng thức GM-HM, xem [1])**.** Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta đều có

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM đối với bộ số $x_k := \dfrac{1}{a_k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, ta có ngay bất đẳng thức GM-HM.

[1] Arithmetic mean value -Trung bình cộng, Geometric mean value -Trung bình nhân.

[2] Harmonic mean -Trung bình điều hòa

Cho đến nay, người ta đã biết đến hàng trăm cách khác nhau để chứng minh Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân.

Mỗi cách chứng minh Định lý 1.5 đều có những đặc thù theo ý tưởng và mục tiêu riêng của các nhà toán học. Có những cách chứng minh (của một số nhà khoa học nổi tiếng) xuất phát từ những ý tưởng tưởng như không liên quan trực tiếp gì tới các giá trị trung bình cộng và trung bình nhân của bộ số dương đã cho.

Sau đây, ta sẽ trình bày một số cách chứng minh tương đối sơ cấp và dễ hiểu giúp ta nhìn nhận các mở rộng sau đó một cách hệ thống và có tính lôgic tự nhiên (xem [1]).

1.2.1. Quy nạp kiểu Cauchy

Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất vào năm 1821.

Từ hệ thức bậc hai

$$u_1^2 + u_2^2 \geqslant 2u_1u_2,\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

ta suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2},\ \forall x_1, x_2 \text{ không âm}. \tag{1.5}$$

Thay x_1, x_2 lần lượt bằng các biến mới $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ và $\dfrac{x_3 + x_4}{2}$, từ (1.5) ta nhận được

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &\geqslant \Big[\frac{x_1 + x_2}{2}\frac{x_3 + x_4}{2}\Big]^{\frac{1}{2}} \geqslant \\ &\geqslant [(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Tiếp tục quá trình như trên ta thấy bất đẳng thức (1.3) đúng với $n = 2, 4, \ldots$ và nói chung, đúng với n là lũy thừa của 2. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

Bây giờ ta thực hiện quy trình quy nạp theo hướng xuống phía dưới. Ta chứng minh rằng, khi bất đẳng thức (1.3) đúng với n $(n > 1)$ thì nó cũng đúng với $n - 1$. Thay x_n trong (1.3) bởi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

và giữ nguyên các biến x_i khác, từ (1.3) ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}.$$

Từ kết quả đã chứng minh theo cặp hướng (lên-xuống), ta thu được phép chứng minh quy nạp của Định lý 1.5.

Tiếp theo, theo đúng cách chứng minh quy nạp kiểu Cauchy, ta chứng minh được các bất đẳng thức sau đây.

Bài toán 1.1 (Bất đẳng thức Ky Fan)**.** Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương trong $\Big(0, \dfrac{1}{2}\Big]$. Khi đó

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - x_k)}{\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} (1 - x_k)\Big]^n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bài toán 1.2. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các số không âm và $n = 1, 2, \ldots$. Khi đó

$$\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\Big)^n \leqslant \frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n}{m}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$.

1.2.2. Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp

Đa thức $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với bộ n biến số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được hiểu là hàm số (biểu thức) có dạng

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{N} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

trong đó

$$M_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=k} a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n},\ \ j_i\in\mathbb{N}\ \ (i=1,2,\dots,n). \tag{1.7}$$

Trong mục này ta quan tâm chủ yếu đến các dạng đa thức đồng bậc biến số thực và nhận giá trị thực, đặc biệt là các đa thức đối xứng sơ cấp quen biết liên quan đến các hằng đẳng thức đáng nhớ trong chương trình toán trung học phổ thông.

Trước hết, ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k.$$

Nếu ta coi $(x+a)^n$ như là tích của n thừa số: $(x+a)(x+a)\cdots(x+a)$, thì khi đó tích

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

cũng có thể viết dưới dạng một biểu thức tương tự như công thức khai triển nhị thức Newton như sau:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_j^{n-k}x^k,$$

trong đó

$$\begin{cases} p_1 &= \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\\ p_2^2 &= \dfrac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j}{\binom{n}{2}},\\ \dots & \dots\dots\dots\\ p_n^n &= a_1a_2\cdots a_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Vậy nên, nếu các số $a_1,a_2,\dots,a_n$ đều dương (hoặc không âm và không đồng thời bằng 0) thì không mất tính tổng quát, ta có thể coi các số $p_1,p_2,\dots,p_n$ đều là số dương (không âm). Từ (1.8), ta thu được